

Άλγεβρα Α' Λυκείου

Στεφανής Παναγιώτης

Συνδυαστικές Ασκήσεις

Ασκήσεις δημοσιευμένες στο περιοδικό <<Ευκλείδης>> τεύχος 84

Ασκηση 1

α) Να δείξετε ότι: $7 + 10 + 13 + 16 + \dots + 109 = 2030$

β) Να λυθεί η ανίσωση: $|7 - 7x| + |10x - 10| + |13x - 13| + \dots + |109x - 109| \geq 4.060$

γ) Να εξετάσετε αν ο αριθμός $\rho = 5 - \sqrt[3]{6 + \sqrt{2}}$ είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης.

Λύση

α) Οι όροι του αθροίσματος είναι διαδοχικοί όροι αριθ. προόδου με

$$a_1 = 7 \text{ και } \omega = 3, \text{ τότε } a_n = 109 \Leftrightarrow 7 + (n-1)3 = 109 \Leftrightarrow n = 35$$

$$\text{Άρα το ζητούμενο άθροισμα είναι: } S_{35} = (7 + 109) \frac{35}{2} = 2030$$

β) Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται :

$$7|x-1| + 10|x-1| + \dots + 109|x-1| \geq 4060$$

$$\Leftrightarrow (7 + 10 + 13 + \dots + 109)|x-1| \geq 4060 \Leftrightarrow$$

$$2030|x-1| \geq 4060 \Leftrightarrow |x-1| \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$(x-1 \geq 2 \text{ ή } x-1 \leq -2) \Leftrightarrow x \geq 3 \text{ ή } x \leq -1$$

γ) Γι' αυτό αρκεί: $5 - \sqrt[3]{6 + \sqrt{2}} > 3$, ή $2 > \sqrt[3]{6 + \sqrt{2}}$, ή $8 > 6 + \sqrt{2}$, ή $2 > \sqrt{2}$, ή $4 > 2$, που ισχύει.

Άρα ο αριθμός ρ είναι λύση της.

Ασκηση 2

Εστω η αριθμητική πρόοδος a_n με $a_1 = \frac{1}{6}$ και τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα και ισχύει $P(A) = a_1$, $P(B) = a_2 + a_3$.

i) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = \frac{1}{6}$.

ii) Αν $N(A) = 10$, να βρείτε $N(B)$.

Λύση

i) Έχουμε: $A \cup B = \Omega \Rightarrow P(A \cup B) = 1 \Rightarrow P(A) + P(B) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = 1 \Rightarrow \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6} + \omega\right) + \left(\frac{1}{6} + 2\omega\right) = 1 \Rightarrow \frac{3}{6} + 3\omega = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{6}$$

ii) Είναι $P(A) = a_1 = \frac{1}{6}$

$$\text{Άρα: } \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{10}{N(\Omega)} = \frac{1}{6} \Rightarrow N(\Omega) = 60$$

$$\text{Επίσης } P(B) = a_2 + a_3 = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

$$\text{Άρα } \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{5}{6} \Rightarrow N(B) = 60 \cdot \frac{5}{6} = 50$$

Άσκηση 3

α) Να λυθεί η ανίσωση $\left| \frac{x-1}{3} \right| < \frac{4\kappa}{3} - |x-1|$, όπου κ είναι θετικός ακέραιος.

β) Έστω ότι το άθροισμα των θετικών ακέραιων λύσεων της ανίσωσης είναι 66,

β₁) Να βρείτε το κ .

β₂) Επιλέγουμε τυχαία μία από τις θετικές ακέραιες λύσεις της παραπάνω ανίσωσης.

Εστω το ενδεχόμενο A: Η λύση που επιλέξαμε επαληθεύει την εξίσωση $x^5 - 16x = 0$. Να βρεθεί η $P(A)$

Λύση

$$\begin{aligned} \alpha) \left| \frac{x-1}{3} \right| < \frac{4\kappa}{3} - |x-1| &\Leftrightarrow \frac{|x-1|}{3} + |x-1| < \frac{4\kappa}{3} \Leftrightarrow \\ |x-1| + 3|x-1| < 4\kappa &\Leftrightarrow |x-1| < \kappa \Leftrightarrow -\kappa < x-1 < \kappa \Leftrightarrow \\ 1-\kappa < x < 1+\kappa \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \text{ Έχουμε: } 1+2+\dots+\kappa &= 66 \Rightarrow (1+\kappa)\frac{\kappa}{2} = 66 \Rightarrow \kappa + \kappa^2 = 132 \Rightarrow \kappa^2 + \kappa - 132 = 0 \\ &\Rightarrow \kappa \in \{11, -12\} \Rightarrow \kappa = 11 \end{aligned}$$

γ) Στο $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ έχουμε:

$$x^5 - 16x = 0 \Leftrightarrow x(x^4 - 16) = 0 \Leftrightarrow x \in \{0, -2, 2\} \Leftrightarrow x = 2$$

$$\text{Συνεπώς } A = \{2\}, \text{ οπότε } P(A) = \frac{1}{11}$$

Άσκηση 4

Έστω η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ παράμετρος.

i) Να δείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε για ποια λ , υπάρχουν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$(\alpha^2 - \lambda\alpha + \lambda - 1)(\beta^2 - \lambda\beta + \lambda - 1) < 0 \quad (2)$$

iii) Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της (1), τότε να εξετάσετε αν υπάρχει λ ώστε οι αριθμοί ρ_1, λ, ρ_2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Λύση

i) Είναι $\Delta = (-\lambda)^2 - 4(\lambda - 1) = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Συνεπώς η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

ii) Αν $f(x) = x^2 - \lambda x + \lambda - 1$, τότε $(2) \Leftrightarrow f(\alpha)f(\beta) < 0 \Leftrightarrow f(\alpha), f(\beta)$ ετερόσημοι $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda \neq 2$.

iii) Αν $\lambda = 2$, τότε $\rho_1 = \rho_2 = 1$, οπότε οι αριθμοί 1, 2, 1 δεν αποτελούν διαδοχικούς όρους, αριθ. προόδου.

$$\text{Αν } \lambda \neq 2, \text{ τότε οι ρίζες της (1) είναι } \rho_{1,2} = \frac{\lambda \pm \sqrt{(\lambda - 2)^2}}{2} = \frac{\lambda \pm |\lambda - 2|}{2},$$

$$\text{δηλαδή } \rho_1 = \frac{\lambda + \lambda - 2}{2} = \lambda - 1, \rho_2 = \frac{\lambda - (\lambda - 2)}{2} = 1, \text{ ή αντιστρόφως.}$$

Όμως ρ_1, λ, ρ_2 διαδοχικοί όροι αριθμ. προόδου $\Leftrightarrow \rho_2, \lambda, \rho_1$ διαδοχικοί όροι αριθ. προόδου $\Leftrightarrow 2\lambda = \rho_1 + \rho_2 \Leftrightarrow 2\lambda = \lambda \Leftrightarrow \lambda = 0$, δεκτή τιμή αφού $0 \neq 2$.

Άσκηση 5

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω .

Οι πιθανότητες $P(A), P(B)$ είναι λύσεις της εξίσωσης: $x^2 - \frac{5}{6}x + P(A \cap B) = 0$

και είναι $P(A \cup B) = \frac{4}{6}, P(A) < P(B)$.

i) Να βρείτε τα $P(A), P(B)$.

ii) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου : «δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα A και B »

iii) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου : «πραγματοποιείται μόνο το A »

Λύση :

i) Είναι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\frac{4}{6} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$\text{Όμως } P(A) + P(B) = -\frac{-\frac{5}{6}}{1} = \frac{5}{6} \text{ (άθροισμα ριζών)}$$

$$\text{Άρα : } \frac{4}{6} = \frac{5}{6} - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Ετσι η εξίσωση γίνεται $x^2 - \frac{5}{6}x + \frac{1}{6} = 0$, που έχει ρίζες $x_1 = \frac{2}{6}, x_2 = \frac{3}{6}$

και επειδή $P(A) < P(B)$ θα είναι $P(A) = \frac{2}{6}$ και $P(B) = \frac{3}{6}$.

$$\text{ii) } P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\text{iii) } P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

Άσκηση 6

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε η εξίσωση:

$$\left(P(A) - \frac{1}{4}\right)x^2 - 4P(A)x + 4 = 0, \text{ να μην έχει ρίζες άνισες και να ισχύει } |1 - P(B)| - |P(B)| = -\frac{1}{3}$$

i) Να βρείτε την $P(A)$

ii) Να βρείτε $P(B)$.

iii) Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.

Λύση

$$\Delta = (-4P(A))^2 - 4\left(P(A) - \frac{1}{4}\right) \cdot 4$$

$$\text{i) Είναι } = 16[P(A)]^2 - 16P(A) + 4 = 4(2P(A) - 1)^2 \geq 0$$

$$\text{Η εξίσωση δεν έχει ρίζες άνισες } \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow 4(2P(A) - 1)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow 2P(A) - 1 = 0 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$\text{ii) Επειδή } 0 \leq P(B) \leq 1 \text{ θα είναι } |1 - P(B)| - |P(B)| = -\frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$1 - P(B) - P(B) = -\frac{1}{3} \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} = 2P(B) \Rightarrow P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

iii) Έστω ότι τα A, B είναι ασυμβίβαστα. Τότε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 1, \text{ πράγμα άτοπο.}$$

Συνεπώς δεν είναι ασυμβίβαστα.

Άσκηση 7

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$ και τα σημεία της γραφικής παράστασης με τετμημένες x_1, x_2, x_3 .

α) Αν τα x_1, x_2, x_3 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να δείξετε ότι οι αντίστοιχες τεταγμένες είναι επίσης διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

β) Έστω η συνάρτηση $g(x) = |x|$

i) Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > g(x)$

ii) Να εξηγήσετε τι εκφράζουν γραφικά οι λύσεις της ανίσωσης

iii) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις δυο γραφικές παραστάσεις

Λύση

Έχουμε: $x_2^2 = x_1 \cdot x_3$ (1) και θέλουμε να δείξουμε ότι: $[f(x_2)]^2 = f(x_1) \cdot f(x_3)$, δηλαδή $(x_2^2)^2 = x_1^2 \cdot x_3^2$, ή $x_2^4 = (x_1 x_3)^2$, που ισχύει λόγω της (1).

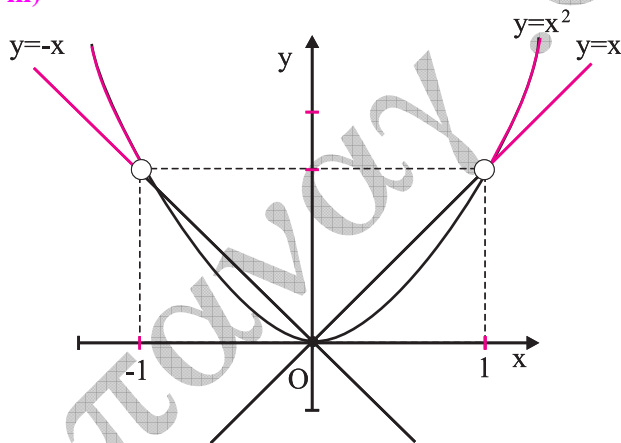
β) $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^2 > |x| \Leftrightarrow |x|^2 > |x| \Leftrightarrow |x|^2 - |x| > 0 \Leftrightarrow |x|(|x| - 1) > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $|x| - 1 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $|x| > 1 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Β' τρόπος

$$f(x) > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = y \\ y^2 - y > 0 \end{cases} \text{ κ.λ.π.}$$

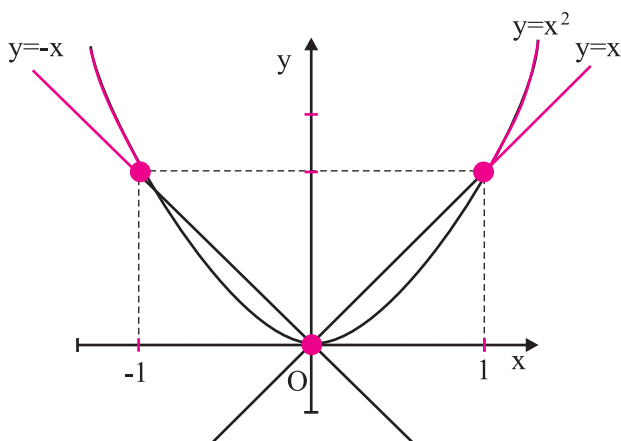
ii) Οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα σημεία των διαστημάτων, στα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g

iii)



σχήμα α

- Παρατηρήστε εξάλλου ότι: $f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow |x|(|x| - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $|x| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $|x| \geq 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \cup \{0\}$.



σχήμα β

Άσκηση 8

Έστω η παραβολή $y = x^2 - \lambda x + \lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$, η οποία έχει κορυφή K με $y_K = 2$.

α) Να βρείτε το λ .

β) Για το λ που βρήκατε να λύσετε την ανίσωση: $|f(x) - 1| - |f(x) + 2| \geq x^2 - 6$, όπου $f(x) = x^2 - \lambda x + \lambda + 2$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

γ) Αν για το ενδεχόμενο A ενός δειγματικού χώρου Ω με ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα ισχύει: $P(A) + 1 = y_1$, όπου $M(x_1, y_1)$ σημείο της παραβολής, τότε να δείξετε ότι το A είναι το βέβαιο ενδεχόμενο και να βρείτε το x_1 .

Λύση

α) Ως γνωστόν $x_K = \frac{\lambda}{2}$, οπότε $y_K = 2 \Rightarrow \frac{\lambda^2}{4} - \frac{\lambda^2}{2} + \lambda + 2 = 2$

$\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda^2 + 4\lambda = 0 \Rightarrow \lambda(4 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda = 4$, αφού $\lambda \neq 0$.

β) Το τριώνυμο $f(x)$ έχει ελάχιστη τιμή το 2, οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq 2 > 1 > -2$. Άρα $|f(x) - 1| > 0$ και $|f(x) + 2| > 0$

Η ανίσωση ισοδύναμα γίνεται: $f(x) - 1 - (f(x) + 2) \geq x^2 - 6 \Leftrightarrow x^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$

γ) Είναι $y_1 = f(x_1) \geq 2$, οπότε $P(A) + 1 \geq 2 \Rightarrow P(A) \geq 1$, ενώ $0 \leq P(A) \leq 1$. Άρα $P(A) = 1 \Rightarrow A = \Omega$. Εξάλλου $P(A) = 1 \Rightarrow f(x_1) = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{\lambda}{2} = 2$.

Σχόλιο Συντακτικής Επιτροπής: Αν τα στοιχειώδη ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα π.χ. $\Omega = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ με

$P(\{\alpha\}) = \frac{1}{3}$, $P(\{\beta\}) = 0$, $P(\{\gamma\}) = \frac{2}{3}$, τότε μπορεί να υπάρχει $A \subseteq \Omega$ με $P(A) = 1$ και $A \neq \Omega$ π.χ. $A = \{\alpha, \gamma\}$

ή $P(A) = 0$ και $A \neq \emptyset$ π.χ. $A = \{\beta\}$.

Άσκηση 9

Σε αριθμητική πρόοδο (a_n) για κάποιο όρο της a_k ισχύει $-3 < a_k < 1$ (1).

α) Να δείξετε ότι $0 \leq a_k^2 < 9$.

β) Αν στην πρόοδο αυτή είναι: $a_1 = -8$ και $\omega = 2$:

i) Να βρείτε τις τιμές του k ώστε να ισχύει $-3 < a_k < 1$.

ii) Να βρείτε πόσοι αρχικοί όροι της προόδου έχουν άθροισμα 0.

iii) Να λυθεί η εξίσωση: $a_1x + a_2x + \dots + a_nx - 2 = a_k$ όπου a_k οι όροι της προόδου που ικανοποιούν την (1).

Λύση

α) Παρατηρούμε ότι: $(1) \Rightarrow -3 < a_k < 1 \Rightarrow |a_k| < 3 \Rightarrow |a_k|^2 < 9 \Rightarrow 0 \leq a_k^2 < 9$

β) i) Έχουμε $a_k = -8 + (k-1)2 = 2k - 10$, οπότε

$$-3 < a_k < 1 \Leftrightarrow -3 < 2k - 10 < 1 \Leftrightarrow 7 < 2k < 11 \Leftrightarrow \frac{7}{2} < k < \frac{11}{2} \Leftrightarrow k \in \{4, 5\}, \text{ αφού } k \in \mathbb{N}^*.$$

ii) $S_v = 0 \Leftrightarrow [2 \cdot (-8) + (v-1)2] \frac{v}{2} = 0 \Leftrightarrow (-16 + 2v - 2) \frac{v}{2} = 0 \Leftrightarrow 2v - 18 = 0 \Leftrightarrow v = 9$, δηλαδή $S_9 = 0$.

iii) Η εξίσωση πλέον ισοδύναμα γράφεται: $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)x - 2 = a_k \Leftrightarrow S_n \cdot x - 2 = a_k \Leftrightarrow 0 \cdot x - 2 = a_k$ (2)

Αν $k=4$, τότε $a_k = 2 \cdot 4 - 10 = -2$, οπότε η (2) αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $k=5$, τότε $a_k = 2 \cdot 5 - 10 = 0$, οπότε η (2) είναι αδύνατη.

Άσκηση 10

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = |\lambda| \cdot x^2 - 1, \lambda \in \mathbb{R}^*$ και $g(x) = 4x - 3$.

i) Να βρείτε για ποια λ οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν τουλάχιστο ένα κοινό σημείο

ii) Για ποιο λ έχουν κοινό σημείο με τετμημένη 1

iii) Να υπολογιστεί το άθροισμα: $S = g(2) + g(4) + g(6) + \dots + g(100)$

Λύση

i) Οι συντεταγμένες των κοινών σημείων είναι οι λύσεις του συστήματος:
$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ y = g(x) \end{array} \right\}, \text{ δηλαδή του}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = f(x) \\ f(x) = g(x) \end{array} \right\} \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \cdot \text{Ομως}$$

$$(2) \Leftrightarrow |\lambda|x^2 - 1 = 4x - 3 \Leftrightarrow |\lambda|x^2 - 4x + 2 = 0.$$

α) Αν $\lambda=0$, τότε $(2) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινό σημείο το $M\left(\frac{1}{2}, -1\right)$

β) Αν $\lambda \neq 0$, τότε για να έχει η (2) λύση πρέπει και αρκεί $\Delta \geq 0$, όπου $\Delta = 16 - 8|\lambda| = 8 \cdot (2 - |\lambda|)$. Άρα: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow |\lambda| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \lambda \leq 2 \Leftrightarrow \lambda \in [-2, 0) \cup (0, 2]$. Τελικά πρέπει και αρκεί $\lambda \in [-2, 2]$

ii) Πρέπει και αρκεί $f(1) = g(1)$ (i) και (i) $\Leftrightarrow |\lambda| - 1 = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$ ή $\lambda = -2$

iii) $S = 4(2 + 4 + 6 + \dots + 100) - 50 \cdot 3$. Όμως το $(2 + 4 + 6 + \dots + 100)$ είναι άθροισμα διαδοχικών όρων αριθ. προόδου με $a_1 = 2$, $\omega = 2$, οπότε $a_v = 100 \Leftrightarrow a_1 + (v-1)\omega = 100 \Leftrightarrow v = 50$

$$\text{Άρα } S = 4 \cdot S_{50} - 150 = 4 \left(2 + 100 \right) \frac{50}{2} - 150 = 100 \cdot 102 - 150 = 10050$$

Άσκηση 11

Έστω τα συμπληρωματικά ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου Ω που αποτελείται από ισοπίθανα στοιχειώδη ενδεχόμενα

α) Να δείξετε ότι $[P(A)]^2 + [P(B)]^2 \geq \frac{1}{2}$

β) Να εξετάσετε πότε ισχύει το ίσον στην παραπάνω ανισοισότητα

γ) Αν ισχύει $[P(A)]^2 + [P(B)]^2 = \frac{1}{2}$ και $N(A)^2 - 20N(B) + 100 = 0$ να βρείτε το $N(\Omega)$

Λύση

α) Αφού τα A, B είναι συμπληρωματικά θα έχουμε: $P(A) + P(B) = 1$

Αν $P(A) = x$, τότε $P(B) = 1 - x$ με $x \in [0, 1]$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$x^2 + (1-x)^2 \geq \frac{1}{2}, \text{ ή } 2x^2 - 2x + 1 \geq \frac{1}{2}, \text{ ή } 4x^2 - 4x + 1 \geq 0, \text{ ή } (2x-1)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$

β) Το ίσον ισχύει όταν και μόνον $(2x-1)^2 = 0$, δηλαδή $x = \frac{1}{2}$ που σημαίνει ότι $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$.

γ) Σύμφωνα με το ερώτημα (β), $[P(A)]^2 + [P(B)]^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \Rightarrow N(A) = N(B)$, οπότε:

$$N(A)^2 - 20N(A) + 100 = 0 \Rightarrow (N(A) - 10)^2 = 0 \Rightarrow N(A) = 10 \text{ και } \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{2} \Rightarrow N(\Omega) = 20.$$

Άσκηση 12

α) Σε κάθε γεωμετρική πρόοδο να δείξετε ότι: $\frac{a_4 - a_1}{a_1 + a_2 + a_3} - 1 = \lambda - 2$

β) Αν σε Γ.Π είναι $\frac{a_4 - a_1}{a_1 + a_2 + a_3} = 5$

i) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου

ii) Αν $f(x) = x^2 - 7x + \lambda$ να δείξετε ότι $f(P(A))f\left(\frac{77}{13}\right) \leq 0$ για κάθε ενδεχόμενο A ενός

δειγματικού χώρου Ω

Λύση

α) Προφανώς $a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + \lambda + \lambda^2) \neq 0$, αφού $a_1 \neq 0$ και $1 + \lambda + \lambda^2 > 0$ (γιατί;)

$$\text{Άρα: } \frac{a_4 - a_1}{a_1 + a_2 + a_3} = \frac{a_1\lambda^3 - a_1}{a_1 + a_1\lambda + a_1\lambda^2} = \frac{a_1(\lambda^3 - 1)}{a_1(1 + \lambda + \lambda^2)} = \lambda - 1$$

β) i) Σύμφωνα με το (α) ερώτημα προκύπτει ότι: $\lambda - 1 = 5 \Leftrightarrow \lambda = 6$

ii) Είναι $f(x) = x^2 - 7x + 6$ που έχει ρίζες τις $x_1 = 1, x_2 = 6$.

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, 6)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

Όμως $P(A) \leq 1$, οπότε $f(P(A)) \geq 0$ και $1 < \frac{77}{13} < 6$, οπότε $f\left(\frac{77}{13}\right) < 0$. Άρα: $f(P(A))f\left(\frac{77}{13}\right) \leq 0$